1. Distribuciones de probabilidad marginal y condicional

<u>Definición</u>:

a Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias conjuntas discretas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$. Entonces las funciones de probabilidad marginal de Y_1 y Y_2, respectivamente, están determinadas por:

$$p_1(y_1) = \sum_{y_2} p(y_1, y_2)$$

y

$$p_2(y_2) = \sum_{y_1} p(y_1, y_2)$$

b Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias continuas conjuntas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Entonces, las funciones de densidad marginal de Y_1 y Y_2, respectivamente, están determinadas por:

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2$$

y

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1$$

<u>Definición</u>:

a Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas conjuntas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$ y funciones de probabilidad marginal $p_1(y_1)$ y $p_2(y_2)$, respectivamente, entonces la función de probabilidad discreta condicional de Y_1, dado Y_2, es

$$p(y_1|y_2) = P(Y_1 = y_1|Y_2 = y_2) = \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)}{P(Y_2 = y_2)} = \frac{p(y_1, y_2)}{p_2(y_2)}$$

siempre y cuando $p_2(y_2) > 0$.

b Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas conjuntas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$, entonces la función de distribución condicional de Y_1, dado $Y_2 = y_2$ es

$$F(y_1|y_2) = P(Y_1 \leq y_1|Y_2 = y_2)$$

c Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias continuas conjuntas con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$, respectivamente. Para cualquier y_2 tal que $f_2(y_2) > 0$, la densidad condicional de Y_1, dado $Y_2 = y_2$, está determinada por

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

<u>Ejemplo</u>. Usando los datos del ejercicio de los accidentes de niños de la clase pasada

a Proporcione las funciones de probabilidad marginal de Y_1 y Y_2.
b Proporcione la función de probabilidad condicional de Y_2 dado que $Y_1 = 0$.
c ¿Cuál es la probabilidad de que un niño sobreviva si viajaba en un asiento para bebé?.

<u>Solución</u>.
a) Es claro a partir del cuadro dado que

$$P(Y_1 = y_1) = \begin{cases} 0{,}76 & , \quad y_1 = 0 \\ 0{,}24 & , \quad y_1 = 1 \end{cases}$$

Igualmente

$$P(Y_2 = y_2) = \begin{cases} 0{,}55 & , \quad y_2 = 0 \\ 0{,}16 & , \quad y_2 = 1 \\ 0{,}29 & , \quad y_2 = 2 \end{cases}$$

b) Ahora, para hallar la función de probabilidad condicional debemos calcular las probabilidades de cada valor de Y_2 dado el valor de $Y_1 = 0$.

$$P(Y_2 = 0|Y_1 = 0) = \frac{P(Y_1 = 0, Y_2 = 0)}{P(Y_1 = 0)} = \frac{p(0,0)}{p_1(0)} = \frac{0{,}38}{0{,}76} = \frac{19}{38}.$$

$$P(Y_2 = 1|Y_1 = 0) = \frac{P(Y_1 = 0, Y_2 = 1)}{P(Y_1 = 0)} = \frac{p(0,1)}{p_1(0)} = \frac{0{,}14}{0{,}76} = \frac{7}{38}.$$

$$P(Y_2 = 2|Y_1 = 0) = \frac{P(Y_1 = 0, Y_2 = 2)}{P(Y_1 = 0)} = \frac{p(0,2)}{p_1(0)} = \frac{0{,}24}{0{,}76} = \frac{12}{38}.$$

Entonces la función de probabilidad condicional es

$$P(Y_2|Y_1 = 0) = \begin{cases} \frac{19}{38} & , \quad y_2 = 0 \\ \frac{7}{38} & , \quad y_2 = 1 \\ \frac{12}{38} & , \quad y_2 = 2 \end{cases}$$

c) La probabilidad que nos piden es:

$$P(Y_1 = 0|Y_2 = 2) = \frac{p(0,2)}{p_2(2)} = \frac{0{,}24}{0{,}29} = 0{,}83.$$

<u>Ejercicio</u>. Para el ejemplo de la gasolina de la clase pasada

a Encuentre la función de densidad marginal de Y_2.
b ¿Cuál es la probabilidad de que se venda más de medio tanque, si éste contiene gasolina tres cuartas partes de su capacidad?

<u>SOLUCIÓN</u>.

a) Para hallar la función de densidad marginal hacemos lo siguiente

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_{y_2}^{1} 3y_1 dy_1 = \left[3y_1^2\right]_{y_2}^{1} = \frac{3}{2}\left(1 - y_2^2\right).$$

Claramente esto se cumple para $0 \leq y_2 \leq 1$.

b) Lo que nos piden es $P(Y_2 > \frac{1}{2}|Y_1 = \frac{3}{4})$. Para calcular esta probabilidad necesitamos $f(y_2|y_1)$, y a su vez para está necesitamos $f_1(y_1)$.

$$f_1(y_1) = \int_0^{y_1} 3y_1 dy_2 = 3y_1^2.$$

con $0 \leq y_1 \leq 1$. Luego

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)} = \frac{3y_1}{3y_1^2} = \frac{1}{3y_1}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P\left(Y_2 > \frac{1}{2}|Y_1 = \frac{3}{4}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f\left(y_2|y_1 = \frac{3}{4}\right) dy_2 \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{4}{3} dy_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$